Zusammenfassung der Diplomarbeit
Klassifikation und Degeneration von Lie-Algebren

von Christine Steinhoff, Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 1997

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K ($\mathrm{char}(K) \neq 2$). Zusammen mit einer bilinearen, schiefsymmetrischen Abbildung $\mu = [\ ,\ ] : V \times V \to V$, die die Jacobi–Identität erfüllt, nämlich

$$[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0 \quad \forall\, x,y,z \in V$$

wird V zu einer Lie-Algebra $\mathfrak{g} = (V,\mu)$ über K. Die Klasse aller $n-$ dimensionalen Lie-Algebren soll im folgenden mit $\mathcal{L}_n(K)$ bezeichnet werden.

Ist nun $\mathfrak{g}$ eine endlich–dimensionale Lie–Algebra über K mit Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$, dann ist die Multiplikationstafel von $\mathfrak{g}$ durch die Lie-Klammern $[e_i,e_j]$ gegeben:

$$[e_i,e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}e_k \ \text{ mit } \ c_{ijk} \in K.$$

Die c_{ijk} werden Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bzgl. $\{e_1,\dots,e_n\}$ genannt. Die Klasse aller $\{c_{ijk}\}$ bildet den sogenannten Strukturtensor.
Eine Lie-Algebra kann jetzt auch durch die folgenden Gleichungen definiert werden:

(*i*) $c_{iik} = 0$ und $c_{ijk} = -c_{jik} \quad \forall\, i,j,k = 1,\dots,n$
(*ii*) $\sum_{l,m=1}^{n}(c_{ijl}c_{lkm} + c_{jkl}c_{lim} + c_{kil}c_{ljm}) = 0 \ \forall\ i,j,k,l,m = 1,\dots,n$

Die Strukturtensoren stehen also in 1-1-Korrespondenz mit entsprechenden Lie-Algebren. Mit Hilfe dieser Identifikation kann $\mathcal{L}_n(K)$ als Teilmenge des K^{n^3} angesehen werden. Definiert wird $\mathcal{L}_n(K)$ (nach (i),(ii)) durch $\frac{n^3-n}{6}$ algebraische Gleichungen.

Eine abgeschlossene Teilmenge des affinen $n-$ Raumes $\mathbb{A}^n_K$, der aus den $n-$ Tupeln von Elementen aus K besteht, bezeichnet man als affin algebraische Varietät. Dabei liegt die Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^n_K$ zugrunde (vgl. Kap. 1.3, Seite 4).

$\mathcal{L}_n(K)$ bildet eine affin algebraische Varietät, auf der die Gruppe $\mathbf{GL}_n(K)$ vermöge "$*$" operiert:

$$* :\ \mathbf{GL}_n(K) \times \mathcal{L}_n(K) \to \mathcal{L}_n(K)$$

$$(g*\mu)(x,y) := g(\mu(g^{-1}x, g^{-1}y)) \quad \forall\, x,y \in V$$

Somit ist der Orbit aller zu einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ isomorphen Lie-Algebren folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g}) := \{G * \mathfrak{g} \mid G \in \mathbf{GL}_n(K)\}$$

Als affin algebraische Varietät ist $\mathcal{L}_n(K)$ mit der Zariskitopologie versehen, ist also ein topologischer Raum. Bezüglich der Zariskitopologie kann man jetzt Orbitabschlüsse von Lie-Algebren betrachten. Im Fall, daß der zugrundeliegende Körper $\mathbb{C}$ ist, stimmt dieser Zariski-Abschluß mit dem Abschluß, der bzgl. der feineren euklidischen Topologie gebildet wird, überein (vgl. Kapitel 5.1). Der Orbitabschluß zu einer $n-$dimensionalen Lie-Algebra ist Vereinigung von (u.U. überabzählbar vielen) Orbiten $n-$dimensionaler Lie-Algebren. Man bezeichnet die Orbitabschlußpunkte zu einer gegebenen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ als *Degenerationen* eben dieser Lie-Algebra $\mathfrak{g}$.

Die Klassifikation der Lie-Algebren in $\mathcal{L}_n(K)$ ist eine Voraussetzung, wenn man alle Orbiten der Dimension n untersuchen möchte. Damit ergibt sich schon das erste Problem. Zwar sind alle einfachen und halbeinfachen Lie-Algebren klassifiziert, desweiteren lassen sich nicht auflösbare auf ein semidirektes Produkt des Radikals mit einer halbeinfachen zurückführen (vgl. Kapitel 2), aber für auflösbare und nilpotente sind Klassifikationslisten nur in kleinen Dimensionen bekannt. Gerade bei auflösbaren Lie-Algebren existieren Klassifikationen schon ab Dimension 4 im wesentlichen nur noch über dem Grundkörper $K = \mathbb{R}$ (und das auch nur bis einschließlich Dimension 6), nicht aber über $\mathbb{C}$. Viele Listen sind unvollständig oder mit Fehlern behaftet. Für die vorliegende Arbeit wurde die allgemeine Liste aller 4-dimensionalen Lie-Algebren über $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ aus [Pat1] benutzt. Diese Liste stellt die jeweiligen Isomorphieklassen in einer sehr übersichtlichen und angenehmen Basiswahl dar. Leider treten hier kleinere Fehler auf, so daß aufgrund von Isomorphie-Rechnungen und Vergleich der in [Mub] veröffentlichten Liste über $\mathbb{R}$, eine Klassifikation komplexer 4-dimensionaler Lie-Algebren aufgestellt wird (vgl. Kapitel 3.3). Es wird dabei angenommen, daß die in [Mub] veröffentlichte Klassifikation fehlerfrei ist. Man findet in der entstehenden Klassifikation 4-dimensionaler, komplexer Lie-Algebren bis auf Isomorphie 3 nilpotente Lie-Algebren der Dimension 4 über $\mathbb{C}$ (nämlich n_4, $n_3 \oplus \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^4$); mit Ausnahme von $sl_2 \oplus \mathbb{C}$ sind alle auflösbar, und es gibt keine einfachen bzw. halbeinfachen Lie-Algebren der Dimension 4 über $\mathbb{C}$.

Es stellt sich nun die Frage, was man über den Orbitabschluß einer gegebenen Lie-Algebra $\mathfrak{g} \in \mathcal{L}_n(K)$ aussagen kann. Welche Punkte liegen im Rand, wann ist der Orbit offen, wann abgeschlossen? Im allgemeinen ist die Frage nach dem Zariski-Abschluß recht schwierig zu beantworten. Auch sind bislang nur vereinzelt oder in sehr speziellen Fällen diese Abschlüsse untersucht worden. In dieser Arbeit soll eine vollständige Bestimmung der Orbitabschlüsse aller 3- und 4- dimensionalen komplexen Lie-Algebren vorgestellt werden (siehe unten).

Wie kann man nun also entscheiden, welche Lie-Algebren bzw. welche Orbiten im Abschluß einer gegebenen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ liegen? Da die Orbiten wegzusammenhängend sind, liegt mit einer Lie-Algebra auch ihr ganzer Orbit im Abschluß von $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$. Dadurch macht diese Untersuchung erst Sinn, denn so sind Degenerationen basiswahlunabhängig. Um nun obige Frage beantworten zu können, habe ich Isomorphie-Invarianten gesucht, die

"mitdegenerieren", d.h. nach solchen, über die eine Aussage getroffen werden kann, wie sie sich im Orbitabschluß verhalten. Es ist durchaus nicht richtig, daß alle Isomorphie-Invarianten "mitdegenerieren". Für einige Invarianten kann überhaupt kein Verhalten vorausgesagt werden (vgl. Kap. 6.1). Desweiteren bleiben natürlich Zariskigleichungen im Abschluß bestehen; diese sind vollständig (in einer gegebenen Dimension n) aber in der Regel nicht leicht zu bestimmen. Bei der Suche nach derartigen Invarianten habe ich unter anderem die Spur generischer ad-Elemente untersucht bzw. ihre Produkte:
Dabei bezeichne ad die adjungierte Darstellung:

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, die durch die Struktur $\mu = (\gamma_i) \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ mit Strukturkonstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ repräsentiert wird. Seien $x, y \in \mathfrak{g}$ und (i,j) ein Paar natürlicher Zahlen mit $i < j$. Falls für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ die Gleichung

$$(1) \quad \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x)^i \cdot \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y)^j = c_{ij} \cdot \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)^i \circ (\operatorname{ad} y)^j)$$

gilt mit der Eigenschaft, daß c_{ij} nur von μ abhängt (also unabhängig von $x, y \in \mathfrak{g}$), und beide Seiten von (1) von Null verschieden sind, so heißt c_{ij} eine $(i,j) -$ *Invariante* von $\mathfrak{g}$. Formal ist c_{ij} ein Element des Quotientenkörpers des Polynomrings $\mathbb{C}[\gamma_1, \ldots, \gamma_r]$, d.h. $c_{ij} \in \mathbb{C}(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$.
Unter dem Einsetzhomomorphismus $\varphi : (\gamma_i) \mapsto \mathbb{C}^{n^3}$ ist $\varphi(c_{ij}) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Folgende Aussagen sind dann zu treffen (vgl. Kapitel 6.1):

(I) Falls

$$(2) \quad \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x)^i \cdot \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y)^j = 0 \quad \forall\, x, y \in \mu$$

oder

$$(3) \quad \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)^i \circ (\operatorname{ad} y)^j) = 0 \quad \forall\, x, y \in \mu$$

gilt, so gelten diese Gleichungen für alle $\lambda \in \overline{\mathcal{O}(\mu)}$.

(II) Eine $(i,j)-$Invariante ist eine Isomorphie-Invariante der entsprechenden Lie-Algebra.

(III) Sei $\mu \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ eine Lie-Algebra, und für $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ existiere eine $(i,j) -$ Invariante c_{ij}. Dann gilt die Gleichung (1) auch für alle $\lambda \in \mathcal{O}(\mu)$. Für $\lambda \in \overline{\mathcal{O}(\mu)} \setminus \mathcal{O}(\mu)$ existiert ein $c'_{ij} \in \mathbb{C}$ und es gilt entweder:

(i) $c_{ij} = c'_{ij}$, falls beide Ausdrücke $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x)^i \cdot \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y)^j$ und $\operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)^i \circ (ady)^j)$ für λ nicht Null sind.

oder

(ii) Ist einer der beiden (oder beide) Ausdrücke (unter (i)) Null, so kann über c'_{ij} keine Aussage getroffen werden, denn entweder $c'_{ij} = 0$ oder c'_{ij} ist nicht eindeutig bestimmt, sondern beliebig in $\mathbb{C}$.

Führt man diese Methode mit verschiedenen Paaren (i,j) für unterschiedliche Lie-Algebren durch, so ergibt sich eine sehr interessante Menge von Polynomen. Das Verhalten der Nullstellen dieser Polynome scheint einem wohldefinierten Schema zu folgen.

Mit Hilfe einer ganzen Reihe derartiger Invarianten – die Spur generischer ad-Elemente, die Dimension der Derivationsalgebra, die Zentrumsdimension, Auflösbarkeit, Nilpotenz, der Rang u.a. – konnte in allen Fällen (Dimension 3 und 4) entschieden werden, welche Lie-Algebren nicht im Abschluß einer gegebenen Lie-Algebra liegen (vgl. Kap. 6.2).

Wie entscheidet man nun aber positiv, welche Orbiten im Abschluß liegen? Dazu betrachte man die folgende Beziehung (vgl Kapitel 5.1):

Seien $\mu,\ \mu' \in \mathcal{L}_n(K)$. Dann gilt: (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$(i)\ \exists\, g_t \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}(t)) \ \text{ mit } \ \lim_{t\to 0} g_t * \mu \cong \mu'$$

$$(ii)\ \mu' \in \overline{\mathcal{O}(\mu)}\ .$$

Findet man also eine die Degeneration realisierende Matrix g_t , so liegt die entsprechende Lie-Algebra natürlich im Abschluß. Indem explizit diese Matrizen gesucht wurden, konnten wiederum alle Lie-Algebren gefunden werden, die im Orbitabschluß einer gegebenen Lie-Algebra liegen. Das Resultat dieser Untersuchung der 3- und 4- dimensionalen Orbitabschlüsse wird im folgenden zusammengefaßt (vgl. dazu auch Kapitel 5.2; zur Definition der einzelnen Lie-Algebren vgl. Kapitel 3.2 und 3.3):

Orbitabschlüsse 3-dimensionaler Lie-Algebren über $\mathbb{C}$:

$\mathfrak{g}$	$\mathcal{O}(\mu) \in \overline{\mathcal{O}(\mathfrak{g})}$
$\mathbb{C}^3$	$\mathbb{C}^3$
n_3	$n_3,\ \mathbb{C}^3$
$r_2 \oplus \mathbb{C}$	$r_2 \oplus \mathbb{C},\ n_3,\ \mathbb{C}^3$
r_3	$r_3,\ r_{3,1},\ n_3,\ \mathbb{C}^3$
$r_{3,\lambda\neq 1}$	$r_{3,\lambda\neq 1},\ n_3,\ \mathbb{C}^3$
$r_{3,1}$	$r_{3,1},\ \mathbb{C}^3$
sl_2	$sl_2,\ r_{3,-1},\ n_3,\ \mathbb{C}^3$

Bemerkenswert ist hier, daß sich der Orbitabschluß von sl_2 vollständig durch die 3-dimensionalen Lie-Algebren der Spur Null beschreiben läßt. Das folgende Diagramm veranschaulicht die Tabelle:

$$
\begin{tikzcd}
 & r_{3,\lambda^2\neq 1}(\mathbb{C}) \arrow[d] & r_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C} \arrow[dl] \arrow[d] & \\
sl_2(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[dr] & n_3(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathbb{C}^3 & r_3(\mathbb{C}) \arrow[l] \arrow[dl] \\
 & r_{3,-1}(\mathbb{C}) \arrow[u] & r_{3,1}(\mathbb{C}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Orbitabschlüsse 4-dimensionaler Lie-Algebren über $\mathbb{C}$:

$\mathfrak{g}$	$\mathcal{O}(\mu) \in \overline{\mathcal{O}(\mathfrak{g})}$
$\mathbb{C}^4$	$\mathbb{C}^4$
$n_3 \oplus \mathbb{C}$	$n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
n_4	$n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$r_2 \oplus \mathbb{C}^2$	$r_2 \oplus \mathbb{C}^2,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$r_3 \oplus \mathbb{C}$	$r_3 \oplus \mathbb{C},\ r_{3,1} \oplus \mathbb{C},\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$r_{3,\lambda\neq\pm1} \oplus \mathbb{C}$	$r_{3,\lambda\neq\pm1} \oplus \mathbb{C},\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$r_{3,1} \oplus \mathbb{C}$	$r_{3,1} \oplus \mathbb{C},\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$r_{3,-1} \oplus \mathbb{C}$	$r_{3,-1} \oplus \mathbb{C},\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$r_2 \oplus r_2$	$r_2 \oplus r_2,\ L_{4,20}(0),\ L_{4,12}(0,0),\ r_{3,\lambda\neq0} \oplus \mathbb{C},\ r_3 \oplus \mathbb{C}$ $r_2 \oplus \mathbb{C}^2,\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$L_{4,10,11}(1)$	$L_{4,10,11}(1),\ \mathbb{C}^4$
$L_{4,10,11}(\alpha \neq 1)$	$L_{4,10,11}(\alpha \neq 1),\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$L_{4,16}(1/3)$	$L_{4,16}(1/3),\ L_{4,10,11}(1),\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$L_{4,14}$	$L_{4,14},\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$L_{4,12}(\alpha \neq 0,\ \beta)$	$L_{4,12}(\alpha \neq 0,\ \beta),\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4,$ $\alpha = 1/27, \beta = 1/3 : L_{4,16}(1/3)$ $\alpha = \alpha'/(\alpha'+2)^3, \beta = (2\alpha'+1)/(\alpha'+2)^2 : L_{4,10;11}(\alpha')$
$L_{4,12}(0,0)$	$L_{4,12}(0,0),\ r_2 \oplus \mathbb{C}^2,\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$L_{4,13}(\alpha)$	$L_{4,13}(\alpha),\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$ $\alpha = 27/4 :\ L_{4,10,11}(-2)$
$L_{4,18}$	$L_{4,18},\ L_{4,10,11}(2),\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$L_{4,19}$	$L_{4,19},\ r_{3,-1} \oplus \mathbb{C},\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$L_{4,20}(0)$	$L_{4,20}(0),\ r_3 \oplus \mathbb{C},\ r_{3,1} \oplus \mathbb{C},\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$L_{4,20}(\alpha \neq 0)$	$L_{4,20}(\alpha \neq 0),\ L_{4,12}(\alpha/8, (1+\alpha)/4),\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$ $\alpha = 1/4 : L_{4,18},\ L_{4,10;11}(2)$
$sl_2 \oplus \mathbb{C}$	$sl_2 \oplus \mathbb{C},\ L_{4,19},\ r_{3,-1} \oplus \mathbb{C},\ n_4,\ n_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$

Es wäre nun wünschenswert, Kriterien zu finden, wie man auf einfache Weise eine eine Degeneration realisierende Matrix finden kann, denn im allgemeinen ist es sehr mühsam, diese zu bestimmen. Insbesondere wächst das Problem in höheren Dimensionen stark an. Man geht darum zu speziellen Klassen von Degenerationen über, z.B. den sogenannten 1-PSG-Degenerationen. Eine 1-PSG-Degeneration μ' ist eine Degeneration von $\mu \in \mathcal{L}_n(K)$, die durch einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbf{GL}_n$ derart realisiert werden kann, daß gilt: $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) * \mu \cong \mu'$. Der Übergang zu einer solchen Spezialisierung führt zu einer Vermutung, durch die die vorliegende Arbeit motiviert wurde (vgl. [Gr1]):

"Jede Degeneration einer (nilpotenten) endlich-dimensionalen Lie-Algebra kann man als 1-PSG-Degeneration realisieren."

Es ist bereits bekannt ([Kr2, S.176ff]), daß im allgemeinen die folgende Frage verneint werden kann:
Kann jede Teilmenge im Orbitabschluß einer Bahn einer $\mathbf{GL}_n-$ Varietät durch 1-PSG-Degeneration erreicht werden? Im allgemeinen kann also eine derart spezielle Matrix, die die Degeneration realisiert, nicht gefunden werden.
Fordert man allerdings zusätzlich, daß diese Teilmenge eine abgeschlossene und $\mathbf{GL}_n-$ stabile Teilmenge ist, so ist die folgende Aussage richtig:
" Ist X eine $\mathbf{GL}_n-$ Varietät, $\mathcal{O}_x = \mathbf{GL}_n * x$ eine Bahn in X und $Y \subseteq \overline{\mathcal{O}_x}$ $\mathbf{GL}_n-$ stabil, dann existiert eine 1-PSG-Degeneration, die durch $g_{t>0} \in \mathbf{GL}_n(t)$ realisiert wird: $\lim_{t\to 0} g_t * x \in Y$."
Aber Orbiten endlich-dimensionaler Lie-Algebren sind mit Ausnahme von $\mathcal{O}(K^n)$ nicht abgeschlossen; die Forderung ist damit zu stark, um sinnvoll damit weiterarbeiten zu können. Es besteht also die Vermutung, daß obige Aussage, die im allgemeinen falsch ist, für die spezielle $\mathbf{GL}_n-$ Varietät der $n-$dimensionalen (vgl. Kapitel 2) Lie-Algebren über K eventuell richtig ist. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß diese Vermutung in der allgemeinen Formulierung einer beliebigen Lie-Algebra in $\mathcal{L}_n(K)$ falsch ist (vgl. Kapitel 6.4). Um dies zu widerlegen, wurde zunächst explizit eine die Degeneration von $r_2 \oplus r_2$ nach n_4 realisierende Matrix, die nicht vom 1-PSG-Typ ist, angegeben. Es wird in Satz 6.7 gezeigt, daß n_4 nicht assoziiert graduierte Lie-Algebra zu irgendeiner Filtration auf $r_2 \oplus r_2$ ist. Theorem 1.2 aus [Gr1] sagt aus, daß dies äquivalent dazu ist, daß n_4 keine 1-PSG-Degeneration von $r_2 \oplus r_2$ ist. Damit ist allerdings noch nicht die Vermutung für nilpotente Lie-Algebren widerlegt. Aussichtsreich scheint es zu sein, in der Klasse der filiformen Lie-Algebren nach einem Gegenbeispiel zu suchen (vgl. Kapitel 5.1).